تمارين المجموعات و التطبيقات

الأولى علوم رياضية

تمرين01:

1)- نعتبر المجموعتين: $A=\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{2k.\pi}{5}/k\in\mathbb{Z}\right\}$ و$B=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{2k.\pi}{5}/k\in\mathbb{Z}\right\}$.

بين أن A و B مجموعتين منفصلتين أي أن: $A\cap B=\varnothing$.

2)- لتكن A و B و C ثلاثة أجزاء من مجموعة غير فارغة E .

أ)- بسط: $\left(\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)\cap\left(\overline{A\cap\overline{C}}\right)\right)\cup A$.

ب)- بين أن: $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(A\cup C)$.

3)- نعتبر المجموعة التالية: $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2\le y;y^2\le x\right\}$.

تحقق أن: $F\neq\varnothing$، ثم بين أن: $F\subset[0,1]\times[0,1]$.

4)- نعتبر المجموعتين: $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\le 1\right\}$ و $F=[-1,1]$.

بين أن: $E\subset F^2$ و $E\neq F^2$ (أي أن $E\subsetneq F^2$) .

5)- لتكن A و B و C ثلاثة أجزاء من مجموعة غير فارغة E بحيث:

$B\subsetneq A\subsetneq C$.

حل في $\mathcal{P}(E)$ النظمتين: $(S_1):\begin{cases}A\cap X=B\\A\cup X=C\end{cases}$ و $(S_2):\begin{cases}A-X=B\\X-A=\overline{C}\end{cases}$.

تمرين02:

نعتبر التطبيق: $f:\begin{vmatrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\x\mapsto\dfrac{2.x}{1+|x|}\end{vmatrix}$.

1)- بين أن f تطبيق تبايني .

2)- بين أن: $|f(x)|\prec 2$ لكل x من $\mathbb{R}$، هل f تطبيق شمولي؟

3)- حدد مجالا J ضمن $\mathbb{R}$ بحيث يكون f تقابلا من $\mathbb{R}$ نحو J .

4)- حدد f^{-1} التقابل العكسي للتقابل $f:\mathbb{R}\to J$.

تمرين03:

نعتبر التطبيق: $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ n\mapsto n+(-1)^n\end{array}\right.$.

1)- بين أن f تطبيق تبايني و شمولي .

2)- أحسب $f\left(f\left(n\right)\right)$ لكل n من $\mathbb{N}$، و إستنتج التقابل العكسي f^{-1} للتقابل f .

تمرين04:

نعتبر التطبيق: $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*\\ m\mapsto E\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{m}\right)\end{array}\right.$

1)- هل التطبيق f تبايني؟

2)- بين بالترجع أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$، يوجد m من $\mathbb{N}^*$ بحيث:

$n\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{m}\prec n+1$. و إستنتج أن التطبيق f شمولي .

تمرين05:

نعتبر التطبيق: $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ (m,n)\mapsto n+\frac{(m+n).(m+n+1)}{2}\end{array}\right.$

1)- بين أن التطبيق f تبايني .

2)- هل التطبيق f شمولي ؟

تمرين06:

نعتبر التطبيق: $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sqrt{x^2-x+1}\end{array}\right.$.

1)- بين أن: $f(x)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، هل f تطبيق شمولي؟

2)- بين أن: $f(1-x)=f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، هل f تطبيق تبايني؟

3)- ليكن g قصور f على المجال $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ ، و h قصور f على المجال $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

أ)- بين أن g تقابل من $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ نحو مجال J يتم تحديده، ثم حدد g^{-1} التقابل العكسي ل g .

ب)- بين أن: $h = g o k$ ،حيث $k:\left|\begin{array}{l}\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\to\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\\ x\mapsto 1-x\end{array}\right.$

ثم إستنتج أن h تقابل و حدد h^{-1} التقابل العكسي ل h.

4)- أ)- أثبت أن: $\forall x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right[: x-\frac{1}{2}\le g(x)\le x+\frac{1}{2}$ ، ثم أول هندسيا هذه النتيجة .

ب)- إستنتج أن: $\forall x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right] : \frac{1}{2}-x\le h(x)\le\frac{3}{2}-x$ ، ثم أول هندسيا هذه النتيجة .

تمرين07:

نعتبر التطبيق: $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x,y)\mapsto(x+y,x.y)\end{array}\right.$

1)- أ)- هل التطبيق f تبايني ؟

ب)- هل التطبيق f شمولي ؟

2)- نعتبر المجموعتين: $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\le y\right\}$ و $F=\left\{(s,p)\in\mathbb{R}^2 / s^2-4.p\ge 0\right\}$.

بين أن: $f(E)=F$

3)- ليكن g قصور التطبيق f على المجموعة E،

بين أن g تقابل من E نحو F، ثم حدد g^{-1} التقابل العكسي ل g .

تمرين08:

1)- أوجد جميع التطبيقات f من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ التي تحقق:

$(1): f(3.x)=2.f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

2)- أوجد جميع التطبيقات f من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ التي تحقق:

$(2): 5.f(x)+f(1-x)=x+2$ لكل x من $\mathbb{R}$.

3)- أوجد جميع التطبيقات f من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ التي تحقق:

$(3): f(x)\times f(y)-f(x.y)=x+y$ لكل x و y من $\mathbb{R}$.

تمرين09:

a و b عددان حقيقيان بحيث $a \prec b$، و f تطبيق من المجال $[a,b]$ نحو $[a,b]$

بحيث: $|f(x)-f(y)|\geq|x-y|$ لكل x و y من $[a,b]$ © .

1)- بين أن: $|f(b)-f(a)|=b-a$.

2)- إستنتج أن هناك تطبيقين يحققان العلاقة © و حددهما .

تمرين10:

1)- حدد جميع التطبيقات f من $\mathbb{R}-\{0,1\}$ نحو $\mathbb{R}$ التي تحقق:

$(e_1): f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=x+1$ لكل x من $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

2)- حدد جميع التطبيقات f من $\mathbb{R}-\{0,1\}$ نحو $\mathbb{R}$ التي تحقق:

$(e_2): f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{x}-x+1$ لكل x من $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

تمرين11:

بين أنه يوجد تطبيق تآلفي و حيد $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، يحقق العلاقتين:

$(i): f\,of(x)=4.x+3$ و $(ii): f\,of\,of(x)=8.x+a$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ثم حدد في هذه الحالة العدد الحقيقي a .

تمرين12:

1)- ليكن f تطبيقا من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بحيث: $f\,of\,of(x)=2.x-1$ لكل x من $\mathbb{R}$.

أثبت أن: $f(1)=1$.

2)- حدد جميع التطبيقات f من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ التي تحقق:

$f(x+\alpha)\leq x\leq f(x)+\alpha$ لكل x من $\mathbb{R}$، (حيث α عدد حقيقي معلوم)

3)- لتكن $P(x)$ حدودية معرفة بما يلي:

$P(x)=x^n+a.x^{n-1}+a.x^{n-2}+.....+a.x+a$ حيث $a\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}^*$.

أثبت أن: $P(1-a)=1$

تمرين13:

نعتبر التطبيقين: $f:E\to F$ و $g:F\to G$

1)- بين أنه إذا كان $g\circ f$ تباينيا فإن f أيضا تبايني .

2)- بين أنه إذا كان $g\circ f$ شموليا فإن g أيضا شمولي .

تمرين14:

لتكن F و G مجموعتين غير فارغتين، و g و h تطبيقين من F نحو G

1)- بين أنه إذا وجد تطبيق شمولي $f:E\to F$ بحيث: $g\circ f=h\circ f$

فإن $h=g$.

2)- بين أنه إذا وجد تطبيق تبايني $f:G\to E$ بحيث: $f\circ g=f\circ h$

فإن $h=g$.