Chorfi_mouhsine@yahoo.fr


## تمرين :

### الجزء الأول :

نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $]-\infty,0[$ بما يلي : $g(x)=x+1+\ln(-x)$ .

1 – أحسب الدالة المشتقة للدالة $g$ و نهايات $g$ عند محدات المجال $]-\infty,0[$ ثم ضع جدول تغييرات الدالة $g$ .

2 – استنتج أن $g(x)\le 0$ لكل $x\in ]-\infty,0[$ .

### الجزء الثاني :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}} & x\ge 0 \\ f(x)=x^2+2x\ln(-x) & x<0 \end{cases}$$

1 – أ – أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

ب – بين أن الدالة $f$ متصلة في $0$ .

ج – أ درس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على يمين و يسار $0$ .

2 – أحسب الدالة المشتقة للدالة $f$ لكل $x\in\mathbb{R}^*$ ثم اعط جدول تغييرات الدالة $f$ .

3 – ليكن $(Cf)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ – بين أن $(Cf)$ يقبل نقطة انعطاف أفصولها سالب.

ب – ادرس الفروع اللانهائية .

ج – أنشئ $(Cf)$.

## الحل :

### الجزء الأول :

1 – الدالة $g$ معرفة على الشكل : $g(x)=x+1+\ln(-x)$ في المجال $]-\infty,0[$ .

*** $g'(x)=(x+1+\ln(-x))'=1+(\ln(-x))'=1+\dfrac{-1}{-x}=1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+1}{x}$ لكل $x\in ]-\infty,0[$ .

*** إشارة $g'(x)$ :

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

*** نحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ .

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x+1+\ln(-x)=\lim_{t\to+\infty} -t+1+\ln(t)=\lim_{t\to+\infty} t\left(-1+\frac{1}{t}+\frac{\ln(t)}{t}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-} x+1+\ln(-x)=\lim_{t\to 0^+} -t+1+\ln(t)=-\infty$$

*** جدول تغييرات الدالة $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $g$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ ‖ |

2 – ** بما أن الدالة $g$ تزايدية على المجال $(-\infty,-1]$ فإنه إذا كان $x\le -1$ فإن $g(x)\le g(-1)$ ومنه $g(x)\le 0$ .

بما أن الدالة $g$ تناقصية على المجال $[-1,0[$ فإنه إذا كان $x\ge -1$ فإن $g(x)\le g(-1)$ ومنه $g(x)\le 0$ .

و بالتالي $g(x)\le 0$ لكل $x\in ]-\infty,0[$ .


Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

**الجزءالثاني :**

1 ـ الدالة $f$ معرفة على الشكل : $\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}} & x\geq 0 \\ f(x)=x^2+2x\ln(-x) & x<0 \end{cases}$ في $\mathbb{R}$ .

أ ـ لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}=1 \quad **$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2+2x\ln(-x)=\lim_{t\to+\infty} t^2-2t\ln(t)=\lim_{t\to+\infty} t^2\left(1-2\frac{\ln(t)}{t}\right)=+\infty \quad **$$

ب ـ لنبين أن الدالة $f$ متصلة في 0 .

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} x^2+2x\ln(-x)=\lim_{t\to0^+} t^2-2t\ln(t)=0=f(0) \quad **$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}=0=f(0) \quad **$$

ومنه $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$ إذن $f$ متصلة في 0 .

ج ـ لندرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على يمين و يسار 0 .

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}}{\sqrt[3]{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{\frac{\frac{x}{x+1}}{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}\times\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2(x+1)}}=+\infty \quad **$$

بما ان $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ فإن $(Cf)$ يقبل نصف مماس عمودي بإتجاه الأعلى معادلته $x=0$ في النقطة $O$ .

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+2x\ln(-x)}{x}=\lim_{x\to0^-} x+2\ln(-x)=-\infty \quad **$$

بما ان $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$ فإن $(Cf)$ يقبل نصف مماس عمودي بإتجاه الأعلى معادلته $x=0$ في النقطة $O$ .

2 ـ ليكن $x\in\mathbb{R}^*$ :

** إذا كان $x<0$ فإن : $f'(x)=\left(x^2+2x\ln(-x)\right)'=2x+2\left(\ln(-x)+x\times\dfrac{1}{x}\right)=2x+2+2\ln(-x)$

ومنه $f'(x)=2x+2+2\ln(-x)=2\left(x+1+\ln(-x)\right)=2g(x)$

و بما أن $g(x)\leq 0$ لكل $x\in\,]-\infty,0[$ حسب السؤال 2 فإن $f'(x)\leq 0$ لكل $x\in\,]-\infty,0[$ .

** إذا كان $x>0$ فإن : $f'(x)=\left(\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}}\right)'=\left(\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}-1}\times\left(\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}\right)=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{-2}{3}}\times\left(\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)$

ومنه فإن $f'(x)\geq 0$ لكل $x\in\,]0,+\infty[$ .

** جدول تغييرات الدالة

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

**Chorfi_mouhsine@yahoo.fr**

3 ـ أ ـ لنبين أن $(Cf)$ يقبل نقطة انعطاف أفصولها سالب .

ليكن $x \in \left]-\infty,0\right[$ .

$$f''(x) = \left(x^2+2x\ln(-x)\right)'' = \left(2x+2+2\ln(-x)\right)' = 2+2\times\frac{1}{x} = 2+\frac{2}{x} = \frac{2x+2}{x}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x+2}{x}=0 \Leftrightarrow 2x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-2}{2}=-1$$ و لدينا $f(-1)=0$

إذن $(Cf)$ يقبل نقطة انعطاف $A(-1,0)$ .

ب ـ لندرس الفروع اللانهائية :

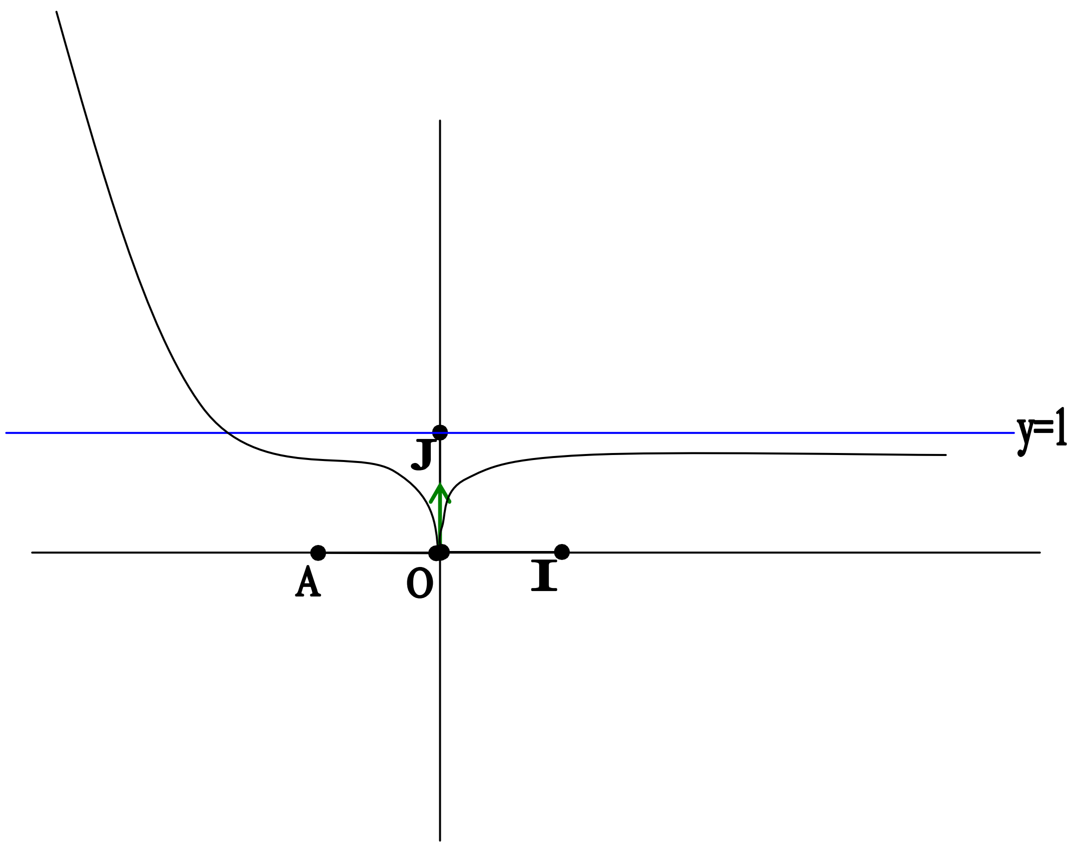
*** لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ إذن $(Cf)$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ معادلته $y=1$ .

*** لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ . لنحسب $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x\ln(-x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x+2\ln(-x) = \lim_{t\to+\infty} -t+2\ln(t) = \lim_{t\to+\infty} t\left(-1+2\frac{\ln(t)}{t}\right) = -\infty$$

ومنه $(Cf)$ يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$ .

ج ـ إنشاء $(Cf)$ .




**Chorfi_mouhsine@yahoo.fr**