

تمرين

نعتبر في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(S) مجموعة النقط $M(x, y)$ تحقق العلاقة : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4z + 9 = 0$ والنقط $A(1,1,1)$ و $B(3,1,0)$ و $C(-1,0,1)$.

1- بين أن (S) فلكة محددا مركزها Ω و شعاعها R.

2- أ- أحسب $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$.

ب- استنتج أن النقط A و B و C نقط غير مستقيمية.

ج- حدد معادلة المستوى (ABC).

3- بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) في دائرة (C) محددا مركزها O و شعاعها r.

4- حدد معادلة المستوى (P) المماس للفلكة في النقطة $C(-1,0,1)$.

5- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) تقاطع المستويين (ABC) و (P).

6- حدد معادلة للفلكة (S') المماسة للمستوى (ABC) في النقطة A و مركزها ينتمي إلى المستوى $(Q) x+y+z=0$.

الحل :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4z + 9 = 0 \quad -1$$

$$x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 4z + 9 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + z^2 + 4z + 4 - 4 + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$$

$$(x-3)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 2^2$$

إذن مجموعة النقط (S) هي فلكة مركزها $\Omega(3,0,-2)$ و شعاعها $R=2$.

2- أ- لنحسب $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$.

لنحدد إحداثيتي المتجهتين \overline{AB} و \overline{AC} .

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \quad \text{إذن} \quad \overline{AC}(-2,-1,0) \quad \text{و} \quad \overline{AB}(2,0,-1)$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = -1\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC}(-1,2,-2) \quad \text{إذن :}$$

ب- بما أن $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \neq \vec{0}$ فإن المتجهتين \overline{AB} و \overline{AC} غير مستقيمتين و منه النقط A و B و C نقط غير مستقيمية.

ج- المستوى (ABC) المحدد بالنقط الغير المستقيمية A و B و C

هو المستوى المار من النقطة A و المتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ منظمية عليه.

إذن معادلة المستوى (ABC) تكتب على الشكل $-x + 2y - 2z + d = 0$.

و بما أن (ABC) يمر من A فإن : $-1 + 2 - 2 + d = 0$ و منه $d = 1$ إذن معادلة (ABC) هي $-x + 2y - 2z + 1 = 0$.

3- * لكي نبين أن (ABC) يقطع الفلكة (S) نحسب المسافة بين $\Omega(3,0,-2)$ مركز الفلكة و المستوى (ABC).

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|-3 + 2 \times 0 - 2 \times (-2) + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} < r = 2$$

بما أن $d(\Omega, (ABC)) < r$ فإن (ABC) يقطع الفلكة (S) في دائرة.

* لنحدد مركز و شعاع الدائرة (C) تقاطع المستوى (ABC) و الفلكة (S).

*** لنحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من النقطة Ω و العمودي على المستوى (ABC).

بما أن (D) يمر من Ω و عمودي على (ABC) فإن المتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(-1,2,-2)$ موجهة له.

$$\begin{cases} x=3-t \\ y=0+2t \quad t \in \mathbb{R} \text{ : ومنه} \\ z=-2-2t \end{cases}$$

***لنحدد نقطة تقاطع المستقيم (D) و المستوى (ABC) .

$$\begin{cases} \begin{cases} x=3-t \\ y=0+2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z=-2-2t \end{cases} \text{ لتكن نقطة التقاطع إذن} \\ -x+2y-2z+1=0 \end{cases}$$

$$\text{و بالتالي } -(3-t)+2(2t)-2(-2-2t)+1=0$$

$$-3+t+4t+4+4t+1=0$$

$$9t+2=0$$

$$t = \frac{-2}{9}$$

$$\begin{cases} x=3-\left(\frac{-2}{9}\right)=3+\frac{2}{9}=\frac{29}{9} \\ y=0+2\left(\frac{-2}{9}\right)=\frac{-4}{9} \\ z=-2-2\left(\frac{-2}{9}\right)=-2+\frac{4}{9}=\frac{-14}{9} \end{cases}$$

ومنه فإن مركز الدائرة (C) هو النقطة $I\left(\frac{29}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{-14}{9}\right)$

***لنحدد r شعاع الدائرة (C) .

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ لدينا}$$

ومنه المستوى (ABC) و الفلكة (S) يتقاطعان في الدائرة (C) التي مركزها $I\left(\frac{29}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{-14}{9}\right)$ و شعاعها $r = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

4 - تحديد معادلة المستوى (P) المماس للفلكة (S) في النقطة $C(-1,0,1)$.

بما أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(-1,0,1)$ فإن المستوى (P) يمر من النقطة $C(-1,0,1)$

و المتجهة $\overrightarrow{\Omega C}(-4,0,3)$ منظمية عليه ومنه فإن معادلة المستوى (P) تكتب على الشكل : $-4x+3z+d=0$

و بما أن النقطة $C(-1,0,1)$ تنتمي إلى المستوى (P) فإن : $-4 \times (-1) + 3 \times 1 + d = 0$

$$4+3+d=0$$

$$d=-7$$

إذن معادلة المستوى (P) $-4x+3z-7=0$

5 - تحديد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) تقاطع المستويين (ABC) و (P) .

بما أن المستقيم (D) هو تقاطع المستويين (ABC) و (P) فإنه موجه بالمتجهة $\vec{n}' \wedge \vec{n}$ بحيث \vec{n} متجهة منظمية على (ABC)

و \vec{n}' متجهة منظمية على (P) و بما أن $\vec{n}(-1,2,-2)$ و $\vec{n}'(-4,0,3)$

$$\vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -12 \\ -40 \end{vmatrix} \vec{k} \text{ فإن}$$

$$\vec{n} \wedge \vec{n}' = 6\vec{i} + 11\vec{j} + 8\vec{k}$$

ومنه المتجهة $\vec{u}(6,11,8)$ موجهة للمستقيم (D) .

و بما أن المستويين (ABC) و (P) يمران من النقطة $C(-1,0,1)$ فإن المستقيم (D) يمر من $C(-1,0,1)$

$$\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 0 + 11t \\ z = 1 + 8t \end{cases} \text{ وبالتالي } t \in \mathbb{R} \text{ تمثيل بارامتري للمستقيم (D) .}$$

6 - تحديد معادلة للفلكة (S') المماسية للمستوى (ABC) في النقطة A و مركزها ينتمي إلى المستوى $x + y + z = 0$ (Q) .

الفلكة (S') مماسة للمستوى (ABC) في النقطة A إذن مركزها ينتمي إلى المستقيم (Δ) المار من النقطة A

و العمودي على المستوى (ABC) و نعلم أن مركزها ينتمي إلى المستوى (Q)

إذن مركز الفلكة (S') هو تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (Q) .

** لنحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) :

بما أن (Δ) يمر من النقطة A و عمودي على المستوى (ABC) فإن المتجهة المنزمية على المستوى (ABC) موجهة له ومنه

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

** لنحدد نقطة تقاطع (Δ) و (Q) .

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 2t \\ x + y + z = 0 \end{cases} \text{ لتكن } M(x, y, z) \text{ نقطة التقاطع إذن}$$

$$1 - t + 1 + 2t + 1 - 2t = 0 \text{ وبالتالي}$$

$$-t + 3 = 0$$

$$t = 3$$

$$\begin{cases} x = 1 - 3 = -2 \\ y = 1 + 6 = 7 \\ z = 1 - 6 = -5 \end{cases}$$

و منه فإن مركز الفلكة (S') هو النقطة $\Omega'(-2, 7, -5)$.

** لنحدد شعاع الفلكة (S') .

الفلكة (S') مركزها $\Omega'(-2, 7, -5)$ و تمر من $A(1, 1, 1)$ إذن شعاعها هو $R' = A\Omega'$.

$$R' = A\Omega' = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-6)^2} = \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{79}$$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

