

بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فاننا نقبل أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

استنتج بنفس الطريقة النهايات الآتية :

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} n, \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p \text{ حيث } p \geq 3 \text{ و } p \in \mathbb{N}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} \text{ حيث } p \geq 3 \text{ و } p \in \mathbb{N}$$

⊙ نشاط بنائي رقم 2 :

(I) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2} \text{ حيث } n \in \mathbb{N}^*$$

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 2) = 0 \text{ - تحقق من أن :}$$

نقول : ان المتتالية (u_n) متقاربة و ان نهايتها 2 ,
و نكتب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

$$(2) \text{- بوضع } u_n = f(n) \text{ حيث } f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$$

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم قارن هذه النتيجة مع $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(II) - لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$u_0 = 2 \text{ و } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$(1) \text{- بين أن } 0 \leq u_n \leq 3 ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$(2) \text{- بين أن } (u_n) \text{ متتالية تزايدية .}$$

⊙ نشاط بنائي رقم 3 :

$$(1) (v_n) \text{ المتتالية معرفة بـ } v_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{أ- بين أن } |v_n - 2| \leq \frac{1}{n} ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{ب- استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

$$(2) (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ م معرفة : } u_n = \frac{\sin n}{n^2} + 1 ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{أ- بين أن } 1 - \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n^2} ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{ب- حدد } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ , ثم } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n^2} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n^2}$$

$$(3) (w_n)_{n \geq 1} \text{ م معرفة بـ : } w_1 = 1 \text{ و}$$

$$w_{n+1} = w_n(1 + w_n) ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{أ- بين أن } w_n \geq n ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{ب- استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$$

أنشطة تذكيرية

⊙ نشاط تذكيري رقم 1 :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 0 \text{ و } u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$(1) \text{- بين أن } (u_n) \text{ مصغورة بالعدد } 0 \text{ و مكبورة بالعدد } 4$$

$$(2) \text{- بين أن المتتالية } (u_n) \text{ تزايدية قطعا .}$$

$$(3) \text{ أ- بين أنه : } 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{ب- استنتج أن : } 4 - u_n \leq 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

⊙ نشاط تذكيري رقم 2 :

لتكن $(u_n)_{n \geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$u_1 = 1 \text{ و } u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n + 5} ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

و لتكن $(v_n)_{n \geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$v_n = \frac{5}{u_n} ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$(1) \text{ أ- أحسب } v_1 \text{ ثم بين أن } (v_n)_{n \geq 1} \text{ متتالية حسابية محددًا أساسها } r$$

$$\text{ب- حدد } u_n \text{ بدلالة } n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

$$(2) \text{- نضع } S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n \text{ حيث } n \in \mathbb{N}^* \text{ , حدد } S_n \text{ بدلالة } n$$

⊙ نشاط تذكيري رقم 3 :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 15 \text{ و } u_{n+1} = \frac{7}{5}u_n - 5 ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$(1) \text{- أحسب } u_1 \text{ و } u_2$$

$$(2) \text{- لتكن } (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :}$$

$$v_n = u_{n+1} - u_n ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

بين أن (v_n) متتالية هندسية محددًا أساسها q , ثم حدد v_n بدلالة n لكل n من \mathbb{N}

$$(3) \text{- لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ , نضع } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$\text{بين أن : } S_n = u_{n+1} - u_0 \text{ , لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ ' ثم استنتج}$$

$$u_n \text{ بدلالة } n$$

أنشطة بنائية

⊙ نشاط بنائي رقم 1 :

$$(u_n) \text{ م معرفة بـ : } u_n = u^2 ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

المتتالية (u_n) هي الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{N}

$$\text{بما يلي : } f(n) = n^2$$

⊙ نشاط بنائي رقم 4 :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$. (\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 2^n$$

(1) - بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$

(2) - استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$. (3) - حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$$

⊙ نشاط بنائي رقم 5 :

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 + \frac{3}{u_n} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

يمثل الشكل جانبه منحنى الدالة f المعرفة على

$$. \text{المجال }]0; +\infty[\text{ بما يلي : } f(x) = 2 + \frac{3}{x}$$

(1 - أ) مثل على محور الأفاصيل النقط ذات الأفاصيل u_1

و u_2 و u_3 .

(ب) تظنن سلوك المتتالية $(u_n)_n$, (التقارب).

2 - حل المعادلة $f(x) = x$; $x \in]0; +\infty[$

3 - نعتبر المتتالية $(v_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$. n \in \mathbb{N} ; v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$$

أ - بين أن المتتالية $(v_n)_n$ هندسية . و حدد v_n ثم u_n

بدلالة n .

ب- تحقق من أن $\forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - 3| \leq \frac{4}{3^n + (-1)^n}$

(د) أستنتج أن $\forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - 3| \leq \frac{4}{n-1}$ (يمكن)

استعمال $3^n \geq n$ لكل n من \mathbb{N}).

(هـ) أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

⊙ تمارين تطبيقية⊙ تمرين تطبيقي رقم 1 :

حدد نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات الآتية :

$$. (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = n\sqrt{n} \quad (1)$$

$$. (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad (2)$$

$$. (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{n}{n+1} \quad (3)$$

$$. (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{2n+3}{5n-1} \quad (4)$$

$$. (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad (5)$$

$$. (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+4} \quad (6)$$

$$. (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \sqrt{2n^2-5} - n\sqrt{2} \quad (7)$$

$$. \forall n \in \mathbb{N}^* : v_n = 3n + \frac{n}{n-1} \quad (8)$$

⊙ تمرين تطبيقي رقم 2 :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^2 + 1) \end{cases}$$

(1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$

(2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية , ثم استنتج أنها متقاربة

⊙ تمرين تطبيقي رقم 3 :

حدد نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات الآتية :

$$. (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = -\frac{1}{3^n} \quad (1)$$

$$. (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 7 \times 2^n \quad (2)$$

$$. (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = -3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad (3)$$

$$. (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{2^n - 3^n}{3^n} \quad (4)$$

$$. (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} \quad (5)$$

$$. (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{3}{4}} \quad (6)$$

$$. (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

$$. (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3} \quad (8)$$

()

تمارين رقم 2 :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{u_n}{3+3^n \cdot u_n} \end{cases}$$

1- أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية ثم استنتج

أ : $u_n \leq 3$ لكل n من \mathbb{N} .

ج- استنتج أن (u_n) متتالية متقاربة .

2) نضع لكل عنصر n من \mathbb{N} : $v_n = \frac{1}{3^n \times u_n}$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية محددًا أساسها وحدها الأول .

ب- حدد u_n بدلالة n لكل n من \mathbb{N} . ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمارين رقم 3 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) :$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

1) بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

2) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمارين رقم 4 :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{و}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{1+u_n}$$

1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$.

2) بين أن (u_n) متتالية رتيبة و استنتج أنها متقاربة .

3) أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(1 - u_n)$.

ب- استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^n$.

ج- ما نهاية (u_n) ؟

تمارين تطبيقي رقم 4 :

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 2 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) .$$

1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 \leq u_n \leq 3$.

2) أدرس رتبة (u_n) .

3) باستعمال الدالة $f : x \rightarrow \sqrt{x} + 1$ على المجال

$$I = [2; 3] \quad \text{حدد} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n .$$

تمارين تطبيقي رقم 5 :

لتكن $(v_n)_{n \geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$v_0 = 0 \quad \text{و} \quad v_{n+1} = \sqrt{2+v_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) .$$

1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq v_n \leq 2$.

2) أدرس رتبة (v_n) ماذا تستنتج ؟

3) باستعمال الدالة $f : x \rightarrow \sqrt{x+2}$ على المجال

$$I = [0; 2] \quad \text{حدد} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n .$$

تمارين تطبيقي رقم 6 :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 2 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = 3u_n - 4 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) .$$

1) تظن $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (يمكن استعمال منحنى

الدالة : $3x - 4 \rightarrow x$ و المستقيم ذا المعادلة $y = x$.

2) بين أن المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي :

$$v_n = u_n - 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \text{هندسية} .$$

3) استنتج u_n بدلالة n .

تمارين داعمة

تمارين رقم 1 :

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + 2} \end{cases}$$

1) أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \sqrt{6}$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعاً .

2) نضع لكل n من \mathbb{N} : $v_n = u_n^2 - 6$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية محددًا أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب v_n بدلالة n لكل n من \mathbb{N} .

ج- حدد u_n بدلالة n وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

⊙ **تمرين رقم 5:**

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 3 \quad \text{و} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2}$$

(1) بين بالترجع أن : $2 < u_n < 4$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(2) أدرس رتبة المتتالية (u_n) , و استنتج أنها متقاربة .

(3) أ- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$.

ب- استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ثم حدد

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

(4) نضع : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية محددًا أساسها و حدها الأول .

ب- حدد v_n ثم u_n بدلالة n .

ج- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(5) نضع لكل $n \geq 1$: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

أحسب S_n بدلالة n و استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

⊙ **تمرين رقم 6:**

بينت دراسة نوع من البكتيريات التي أجريت في لتر من " زراعة سائلة " حيث يحتوي في البداية على 150 بكتيرية , و أن عدد هذه البكتيريات يتضاعف تقريبا ب 1,035 مرة كل دقيقة , و أن بكتيرية واحدة تموت كل دقيقة .

(1) ليكن u_n عدد البكتيريات الحية بعد مرور 20 دقيقة .

(2) لكل n من \mathbb{N} , نضع $V_n = u_n - \frac{1}{0,035}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية ثم استنتج v_n بدلالة n .

ب- استنتج u_n بدلالة n .

ج- ما عدد البكتيريات الحية بعد مرور 20 دقيقة؟

(3) - تم تحسين ظروف الدراسة بحيث لا تموت أية بكتيرية خلال مدة التجربة .

أ- حدد عدد البكتيريات الحية بعد مرور 20 دقيقة .

ب- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, ثم أول هذه النتيجة .

⊙ **تمرين رقم 7:**

لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بما يلي

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$$

(1) بين أنه : $g(x) \geq 3$; $(\forall x \in]1; +\infty[)$.

(2) لتكن المتتالية العددية (u_n) بحيث $u_0 = 2$

و $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = g(u_n)$.

⊙ **تمرين رقم 8:**

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كالآتي : $u_0 = 1$

و $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1$

(1) أحسب u_1 .

(2) أ- برهن أن : $0 \leq u_n \leq 1$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

ب- أدرس رتبة (u_n) .

ج- استنتج أن (u_n) متقاربة .

(3) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

⊙ **تمرين رقم 9:**

(I) f دالة عددية معرفة بما يلي $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3+x^2}$

(1) أدرس تغيرات الدالة f على \mathbb{R}^+ .

(2) حل في \mathbb{R} المعادلة $f(x) = x$.

(3) بين أن $f(x) > x$; $(\forall x \in [0;1])$.

(II) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) ; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(1) بين أن : $0 \leq u_n \leq 1$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(2) أدرس رتبة المتتالية (u_n) و حدد نهايتها .

(III) (v_n) م.ع بحيث $v_n = u_n^2 - 1$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية محددًا أساسها و حدها الأول .

(2) حدد v_n ثم u_n بدلالة n .

(3) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

⊙ **تمرين رقم 10:**

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0; 2]$ ب :

$$g(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x}$$

و المتتالية (u_n) المعرفة ب :

$$u_{n+1} = \sqrt[3]{-u_n^2 + 2u_n} ; u_0 = a ; 0 \leq a \leq 1$$

(1) أ- أحسب : $g'(x)$ لكل من المجال $]0; 2[$ ثم ضع

جدول تغيرات g .

ب- آ استنتج أن : $0 \leq g(x) \leq 1$; $\forall x \in [0; 2]$.

(2) بين أنه إذا كان $a=0$ أو $a=1$ فإن (u_n) ثابتة .

(3) نفترض أن : $0 < a < 1$.

أ- بين أن : $0 < u_n < 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

ب - أدرس رتبة المتتالية و آ استنتج أنها متقاربة .

ج - أحسب نهاية (u_n) .

:	:	:
.		:
.		:

()

السنة الدراسية 2008/2007